Postupnosti

Matej Balog

POSTUPNOSŤ je funkcia definovaná na množine prirodzených čísel N:

$$f(n) = a_n \quad \Leftrightarrow \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

pričom funkčnú hodnotu a_n nazývame n-tý člen postupnosti.

KONEČNÁ n-ČLENNÁ POSTUPNOSŤ je funkcia definovaná na prvých n prirodzených číslach N.

$$D = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

ZADANIE POSTUPNOSTI: postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ môže byť vyjadrená

a) predpisom
b) rekurentne
c) vymenovaním prvkov
d) graficky

MONOTÓNNOSŤ: majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pre každé $n \in N$ platí

- $a_n < a_{n+1} \;\Leftrightarrow$ postupnosť je **RASTÚCA**
- $a_n > a_{n+1} \;\Leftrightarrow$ postupnosť je **KLESAJÚCA**
- $a_n \leq a_{n+1} \;\Leftrightarrow$ postupnosť je **NEKLESAJÚCA**
- $a_n \geq a_{n+1} \;\Leftrightarrow$ postupnosť je **NERASTÚCA**

Rastúce a klesajúce postupnosti sú **RÝDZO MONOTÓNNE** postupnosti.

OHRANIČENOSŤ: majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Existuje $y \in R$ také, že pre každé $n \in N$ platí

- $a_n \leq y \;\Leftrightarrow$ postupnosť je **ZHORA OHRANIČENÁ**
- $a_n \geq y \;\Leftrightarrow$ postupnosť je **ZDOLA OHRANIČENÁ**
- $|a_n| \leq y \;\Leftrightarrow$ postupnosť je zdola i zhora ohraničená $\Leftrightarrow$ postupnosť je **OHRANIČENÁ**

Majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pre každé $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1} \;\Leftrightarrow$ postupnosť je **KONŠTANTNÁ**.

Majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pre všetky navzájom rôzne $x, y \in N$ platí $a_x \neq a_y \;\Leftrightarrow$ postupnosť je **PROSTÁ**.

Majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a rastúcu postupnosť prirodzených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je **VYBRANÁ** z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Existuje $d \in R$ také, že pre každé $n \in N$ platí $a_n + d = a_{n+1} \;\Leftrightarrow$ postupnosť je **ARITMETICKÁ** a číslo d sa nazýva **DIFERENCIA**.

Majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Existuje $q \in R$ také, že pre každé $n \in N$ platí $qa_n = a_{n+1} \;\Leftrightarrow$ postupnosť je **GEOMETRICKÁ** a číslo q sa nazýva **KVOCIENT**.

LIMITA POSTUPNOSTI: Majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a reálne číslo L. Pre všetky $\varepsilon \in R^+$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n > n_0$ je $|a_n - L| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ číslo L je **LIMITA** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

- **KONVERGENTNÁ** postupnosť má limitu $L \in R$
- **DIVERGENTNÁ** postupnosť má limitu v nevlastnom bode $\pm\infty$
- **OSCILUJÚCA** postupnosť nemá limitu

Príklady z bývalých ročníkov EČ MS

Pre každé dva susedné členy postupnosti platí rovnosť $a_{n+1} = 2\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)$. Určte prvý člen tejto postupnosti, ak jej druhý člen je $a_2 = 8$.